

Præcisionsnivellementet over Store Belt.

Af

Generalmajor **G. Zachariae.**

Avec résumé en français.

(Meddelt i Mødet den 11te Marts 1898.)

I.

Indledende Bemærkninger.

I min Meddelelse om Nivellementet over Lille Belt og Limfjorden har jeg antydnet de Omstændigheder, der stille sig i Vejen for et sammenhængende Præcisionsnivellement her i Landet. Vanskeligheden ligger navnlig i Landsdelenes Adskillelse ved Havarme, Sunde og Belter — forholdsvis brede Vandarealer —, hvorover Nivellementet kun kan føres ved Anvendelse af lange Sigter, som i en meget mere fremtrædende Grad end de sædvanlige korte ere underkastede Refraktionens Luner og de deraf flydende Fejl. Første Gang vi stødte paa Vanskeligheden, var ved Overgangen over Limfjorden, hvor Sigtelængden ved Aggersund var over 300 og ved Oddesund omtrent 600 Meter. Saa kom Lille Belt; her voxede Sigtevidden til mere end 800 Meter, og vi staa nu ved Store Belt, hvor Afstanden saavel mellem Fyn og Sprogø som mellem Sprogø og Sjælland er omtrent 8000 Meter eller henimod ti Gange saa stor som ved Lille Belt. Da nu for samme Observationsarbejde Indflydelsen af Refraktionsvingningerne voxer med Afstandens Kvadrat, turde det være umiddelbart indlysende, at Arbejdet ved Store Belt nødvendig maatte faa et langt større Omfang end de tidligere Arbejder af samme Art. Vi skulle dog præcisere Sagen ved et Par Talangivelser.

Lad K være Kilometerfejlen ved korte Sigter (geometrisk Nivellement), medens den partielle fra Refraktionen hidrørende Kilometerfejl ved et langt Sigte (trigonometrisk Nivellement) betegnes ved K' , saa ville de to Middelfejl for en Strækning af n Kilometer udtrykkes ved henholdsvis

$$K\sqrt{n} \quad \text{og} \quad K'n^2.$$

Skulle nu disse 2 Middelfejl være ligestore, maa Observationerne ved lange Sigter gentages P Gange, idet P bestemmes af

$$K^2 n = \frac{K'^2}{P} n^4,$$

altsaa

$$P = \left(\frac{K'}{K}\right)^2 n^3.$$

Ved vort Præcisionsnivellement ligger K mellem 1 og 1,5 Millimeter, medens K' kan anslaaes til 2 à 4 Millimeter, og Kvotienten $K':K$ sættes derfor passende til 1.4 à 4, saa at den til Sigtelængden 8 Kilometer svarende Værdi for P med runde Tal ligger mellem Grænserne

$$1000 \quad \text{og} \quad 10000.$$

Dette store Spillerum viser vel, at tilfældige Omstændigheder kunne faa en stor Indflydelse paa Arbejdets Omfang; men Grænserne vise tillige, at Antallet af Observationer i ethvert Tilfælde maa tælles i tusindvis, og at derfor de tilfældige Fejl, der flyde af andre Kilder end Refraktionen, maa faa en lige over for den tilfældige Refraktionsfejl forsvindende Indflydelse paa det endelige Resultat. Det er i god Overensstemmelse hermed, at man ved ovenstaaende Overslag, der gælder for den forholdsvis store Afstand 8 Kilometer, har benyttet K' som Udtryk for den hele Kilometerfejl. Den totale Middelfejl, der svarer til en saa kort Afstand som en enkelt Kilometer, er større end K' , og dette forklarer, at man ved Lille Belt ikke har indskrænket sig til en halv Snes Iagttagelser, men udført et mange Gange større Antal Indstillinger.

Ved Tusinder af Indstillinger kan vistnok Refraktionssvingningerne neutraliseres; men tilbage bliver der dog en systematisk Refraktionsfejl, der ligesom de systematiske Instrumentfejl kun kan hæves ved en særlig Gruppering af lagttagelserne under Anvendelse af særlige Metoder. Her er benyttet to saadanne Metoder, som i det følgende fremtræde under Benævnelserne «Reciproke Maalinger» og «Maalinger fra den nøjagtige Midte». Begge Metoder gaa ud paa at indføre samme Højdefejl paa hver af de to Retninger, hvis Differens da giver den søgte Højdeforskel befriet for disse Fejl.

Den førstnævnte Methode maa her suppleres ved et geometrisk Nivellement tværs over Sprogø. Man fører nemlig først Nivellementet ved reciproke Maalinger fra Punktet K (Knudshoved) paa Fyen til Punktet V (Vestenden) paa Sprogø. Nævnte Punkt V forbindes dernæst ved et sædvanligt geometrisk Nivellement med Øens Østende, \emptyset , hvorfra Nivellementet ved reciproke Maalinger føres over Beltet til Punktet H (Højklint) paa Sjælland.

Ved den anden Methode, Maalingerne fra den nøjagtige Midte, tages Opstilling i Punktet M paa Sprogø, der paa Meter nøje har den samme Afstand fra K som fra H , og Maalingen bestaar i successiv Indstilling af disse to Punkter.

De reciproke Maalinger ere temmelig komplicerede; de kræve to Instrumenter og to vel indøvede og sammenarbejdede Iagttagere. Maaling fra Midten er langt simplere og kræver kun eet Instrument og en enkelt Iagttagere, men til Gengæld kunne Forberedelserne blive meget omfattende, idet Valget af Midtestationen M kan fordre et betydeligt Arbejde, saa vel for at sikre sig samme Afstand til H og K , som for at opnaa ens Refraktionsbetingelser for Retningerne til disse to Punkter.

I det følgende gives et Uddrag af Maalingerne i Forbindelse med en derpaa baseret Beregning af Resultaterne og deres Nøjagtighed. Hertil knyttes tillige nogle Undersøgelser vedrørende konstante Instrumentfejl, Jordkrumning, Refraktion og Lod-

afvigelse med særligt Hensyn til deres Indflydelse paa Nøjagtigheden af de opnaaede Resultater.

Endnu skal bemærkes, at Iagttagelserne ere udførte af Oberstløjtnant Rasmussen og Premierløjtnant Johansen; førstnævnte har betjent Instrument I, sidstnævnte Instrument II.

II.

Reciproke Maalinger; deres Udførelse og Beregning.

Den ved Store Belt anvendte reciproke Methode er en Del forskellig fra tidligere anvendte Former for reciproke Maalinger. Den her benyttede Form er foreslaet af Oberstløjtnant Rasmussen, og da den saa vidt mig bekendt ikke tidligere har været anvendt, følger her en kort Beskrivelse. Karakteristisk for Rasmussens Fremgangsmaade er, at den ikke fordrer inddelte Kredse; men gennemføres ved sædvanlige Nivellementer med løs Kikkert og Rytterlibelle. Kikkerten er dog for Tilfældet bleven forsynet med Okularmikrometer, og man har benyttet en Dobbeltlibelle med en henimod ti Gange saa stor Følsomhed som den Libelle, der anvendes ved sædvanligt geometrisk Nivellement. Denne store Følsomhed fordrer med Nødvendighed en meget fast Opstilling, og det sædvanlige Stativ er derfor ombyttet med solide murede Piller, hvorpaa Instrumentets Fodskruer hvile under Maalingen, og som ere opførte tæt ved de to Punkter A og B , hvis Højdeforskel skal bestemmes. Indstillingen i A foregaar til et fast Mærke over B og udføres ved Traadmikrometret, hvis Aflæsning M svarer til Libellestillingen L , der ligeledes aflæses. Libellefejlen elimineres ved Omsætning af Libellen og Kollimationsfejlen ved at dreje Kikkerten 180° om Bæringenes Axe. Skemaet for Observationen er saaledes

$$L, M, M, L - L, M, M, L - L, M, M, L - L, M, M, L,$$

hvor de tynde Streger betegne Adskillelsen mellem Iagttagelser før og efter Omsætningen af Libellen, medens den tykke Streg

adskiller den Del af Observationen, der udføres før Kikkertens Drejning om Bæringenes Axe, fra den Del, der følger efter denne Drejning. Disse 8 Mikrometer- og Libelleaflysninger sammendrages til et enkelt Resultat, og dette betegnes i det følgende som den «enkelte Observation». Af saadanne enkelte Observationer paaregnes der med hvert Instrument udført 200 i *A* og 200 i *B*, saaledes at lagttagelserne med Instrument I i *A* og med Instrument II i *B* ere samtidige, ligesaa lagttagelserne med II i *A* og med I i *B*. Som det vil fremgaa af det følgende, er Overflytten af Instrument og Observator fra *A* til *B* og omvendt nødvendig for Eliminationen af visse konstante Fejl ved Instrumenterne.

Betegner man ved *AB* Punktet *B*'s Højde over *A*, ved *ABI* den apparente Værdi af denne Højde, saaledes som den fremgaa af Maalingerne i *A* med Instrument I, saa har man

$$AB = ABI + I + j - r,$$

hvor *I*, *j* og *r* efter Ordenen angiver konstante Instrumentfejl, Korrektion for Jordkrumning og Refraktion. Hertil skulde endnu føjes en Korrektion for tilfældige Fejl, men naar man for *ABI* indfører Gennemsnitsværdien af de 200 i *A* med I udførte enkelte Observationer, der omfatte 1600 Indstillinger, turde det være tilladeligt at betragte den tilfældige Fejl som forholdsvis forsvindende.

For de samtidige Observationer med Instrument II har man med analoge Betegnelser

$$BA = BAI I + II + j - r'$$

eller ved Forandring af Fortegn

$$AB = -BAI I - II - j + r'.$$

Tages Middeltallet af de anførte Bestemmelser af *AB*, erholdes som Resultat af alle de samtidige Maalinger med begge Instrumenter før Omflytningen af disse

$$AB = \frac{1}{2}(ABI - BAI I) + \frac{1}{2}(I - II) + \frac{1}{2}(r' - r).$$

For saa vidt det er lykkedes at gruppere Observationerne heldigt paa forskellige Dagstider og at vælge Punkterne A og B saaledes, at Betingelserne for Sigtet fra A imod B i Gennemsnit ere de samme som fra B imod A , vil Refraktionskorrektionen $\frac{1}{2}(r' - r)$ være ganske forsvindende. Derimod maa den konstante Instrumentfejl $\frac{1}{2}(I - II)$ almindelig være ret betydelig, eftersom en saa ringe Forskel i Diametrene som 1 Mikron = 0,001 Millimeter paa Kikkertens to Bærringe maa frembringe en Højdefejl af over $2n$ Millimeter for en Afstand af n Kilometer. Naar man imidlertid overfører Instrument I fra A til B og II fra B til A og udfører en lignende Række Observationer som før Omflytningen, faar man to Udtryk og et Middeltal af samme Form som ovenfor kun med den Forskel, at I overalt ombyttes med II og omvendt II med I. Den halve Sum af Middeltallene før og efter Instrumentskiftet, altsaa det totale Middeltal, giver da det endelige Resultat befriet for konstante Instrumentfejl. Dette ses af nedenstaaende Oversigt over de 4

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} AB \text{ I} + \text{I} + j - r \\ -BA \text{ II} - \text{II} - j + r' \end{array} \right\} \text{Middeltal} + \frac{1}{2}(I - II) + \frac{1}{2}(r' - r), \\
 \left. \begin{array}{l} AB \text{ II} + \text{II} + j - r \\ -BA \text{ I} - \text{I} - j + r' \end{array} \right\} \text{Middeltal} + \frac{1}{2}(II - I) + \frac{1}{2}(r' - r) \\
 \hline
 AB = \text{Den totale Middelværdi} + \frac{1}{2}(r' - r),
 \end{array}$$

Udtryk for AB og deres Sammendrag først til to partielle Middelværdier, den ene for Maalingerne før, den anden for Maalingerne efter Instrumentskiftet, og dernæst til en total Middelværdi, der omfatter alle de 800 «enkelte» Bestemmelser med tilsammen 6400 Indstillinger.

Ved ovenstaaende Udvikling er det stiltiende forudsat, at Gennemsnitsforskellen mellem de samtidige Refraktioner i modsat Retning er nøjagtig ens i de to Observationsperioder, den ene før, den anden efter Instrumentskiftet. Det følgende vil vise, at denne Forudsætning er fuldt ud opfyldt ved nærværende Nivellement

over Store Belt, og at tillige Refraktionskorrektionen paa det totale Middeltal med en høj Grad af Sandsynlighed kan betragtes som forsvindende, saaledes at dette Middeltal angiver det endelige Resultat.

III.

Oversigt over Iagttagelserne ved de reciproke Maalinger og det supplerende geometriske Nivellement.

Vi skulle nu gaa over til at fremstille et Uddrag af selve Maalingerne. For at simplificere anføres imidlertid ikke alle de «enkelte» Iagttagelser, men kun Gennemsnitsværdierne for Grupper paa 10 «enkelte» umiddelbart efter hinanden udførte Maalinger, saaledes at Antallet af de opførte Talværdier er en Tiendedel af det hele Antal enkelte Maalinger. I hvert af de tre Tableauer over reciproke Maalinger, som anføres nedenfor, svare de tre Kolonner under Overskriften «Halvmeter» til det i forrige Art. givne Skema, idet dog de sammenhørende samtidige Gruppegennemsnit ere opførte hvert i sin Kolonne ved Siden af hinanden og ikke som i Skemaet under hinanden. De to Kolonner med Overskrift «Halvmillimeter» give Afvigelserne v af de enkelte Gruppegennemsnit fra de tilsvarende partielle Middelværdier før og efter Instrumentskiftet, og deres Kvadrater v^2 . Iøvrigt indeholder Tableaernes Hoved og deres første Kolonne med Overskrift «Dato og Dagstid» tilstrækkelige Oplysninger til deres Forstaaelse, hvorved dog maa bemærkes, at den i Kolonnen v anførte Sum er den numeriske og ikke den algebraiske Sum, hvilken sidste afset fra Afrundingsfejl er Nul.

Som allerede omtalt i Art. I skær Overgangen fra Fyn til Sjælland gennem Bestemmelsen af Højdedifferenserne VK , $ØV$ og $HØ$, hvis Sum giver Højden af Punktet K (Knudshoved) over Punktet H (Højklint). Vi begynde da med Tableauet for VK .

Vestenden — Knudshoved.

(Afstand 7649 Meter. Højde over Havfladen omtrent 10 Meter.)

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.			Halvmillimeter.	
	VKI.	—KVII.	Middeltal.	v	v^2
Septbr. 11 E.	— 8.9591	+ 7.8633	— 0.5479	+ 59.8	3576.0
— —	9.1888	8.1370	0.5259	+ 37.8	1428.8
— 12 F.	9.2701	8.3016	0.4843	— 3.8	14.4
— —	9.2872	8.1911	0.5481	+ 60.0	3600.0
— 12 E.	8.7577	7.7365	0.5106	+ 22.5	506.3
— —	8.7236	7.6765	0.5236	+ 35.5	1260.3
— 13 F.	8.9912	7.9857	0.5028	+ 14.7	216.1
— —	8.9225	7.8834	0.5196	+ 31.5	992.3
— 13 E.	8.7326	7.6609	0.5359	+ 47.8	2284.8
— 14 F.	8.3314	7.3818	0.4748	— 13.3	176.9
— —	8.2477	7.3564	0.4457	— 42.4	1797.8
— 15 F.	8.4194	7.4876	0.4659	— 22.2	492.8
— —	8.3312	7.3553	0.4880	— 0.1	0.0
— 15 E.	8.1619	7.3346	0.4137	— 74.4	5535.4
— —	8.1787	7.2469	0.4659	— 22.2	492.8
— 16 F.	8.6436	7.6523	0.4957	+ 7.6	57.8
— —	8.2369	7.2726	0.4822	— 5.9	34.8
— 16 E.	7.9143	7.1228	0.3958	— 92.3	8519.3
— —	8.2336	7.2518	0.4909	+ 2.8	7.8
— 17 E.	— 8.1610	+ 7.2699	— 0.4456	— 42.5	1806.3
Partielsum	—171.6925	+152.1680	— 9.7629	639.1	32800.7
Middelværdi	— 8.5846	+ 7.6084	— 0.4881	31.95	1640.04

Vestenden — Knudshoved (fortsat).

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.			Halvmillimeter.	
	VKII.	—KVI.	Middeltal.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
Oktbr. 10 E.	— 7.4946	+ 8.5571	+ 0.5313	+ 8.4	70.6
— —	7.4189	8.4695	0.5253	+ 14.4	207.4
— 11 F.	7.3129	8.2852	0.4862	+ 53.5	2862.3
— —	7.3329	8.3187	0.4929	+ 46.8	2190.2
— 11 E.	7.3781	8.4908	0.5564	— 16.7	278.9
— —	7.3455	8.4297	0.5421	— 2.4	5.8
— 12 F.	7.3870	8.5752	0.5941	— 54.4	2959.4
— —	7.5368	8.6790	0.5711	— 31.4	986.0
— 12 E.	7.5353	8.6085	0.5366	+ 3.1	9.6
— —	7.5331	8.5373	0.5021	+ 37.6	1413.8
— 13 F.	8.1405	9.1131	0.4863	+ 53.4	2851.6
— —	7.8505	8.9150	0.5323	+ 7.4	54.8
— 13 E.	7.8431	8.7956	0.4763	+ 63.4	4019.6
— —	7.7000	8.8405	0.5703	— 30.6	936.4
— 16 F.	7.5905	8.6386	0.5241	+ 15.6	243.4
— —	7.4899	8.6041	0.5571	— 17.4	302.8
— 16 E.	6.7334	7.9212	0.5939	— 54.2	2937.6
— —	6.4938	7.8108	0.6585	—118.8	14113.4
— 18 F.	8.4067	9.4470	0.5202	+ 19.5	380.3
— 19 F.	— 8.2604	+ 9.3335	+ 0.5366	+ 3.1	9.6
Partielseksum	—150.7839	+172.3704	+10.7937	652.1	36833.5
Middelværdi	— 7.5392	+ 8.6185	+ 0.5397	32.61	1841.68
Totalseksum	—322.4764	+324.5384	+ 1.0308	1291.2	69634.2
Middelværdi	— 8.06191	+ 8.11346	+ 0.0258	32.28	1740.86

Punktet V 's Højde over Punktet \emptyset , $\emptyset V$, er bestemt ved firdobbelt geometrisk Nivellement, som angivet i nedenstaaende Oversigt.

Østenden — Vestenden.

(Afstand 1365 Meter.)

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.	Halvmillimeter.	
	Højdeforskel.	v	v^2
August 15 F.	1.0839	— 4.7	22.1
— 15 E.	1.0760	+ 3.2	10.2
— 16 F.	1.0815	— 2.3	5.3
— 17 E.	1.0755	+ 3.7	13.7
Sum	4.3169	13.9	51.3
Middelværdi	1.0792	3.5	12.8

Ved Overgangen fra Sprogø til Sjælland ere lagttagelserne ligeligt fordelte paa to omtrent parallelle Linier, der ligge tæt ved hinanden, men have en kendelig forskellig Højde over Havfladen, idet den ene, den nordlige, der betegnes ved Endepunkterne \emptyset og H , omtrent har samme Højde som Linien KV , medens den sydlige Linie, der betegnes ved FS efter Fyrbakken paa Sprogø og det lidt sønden for H ogsaa paa Højklint liggende Punkt S paa Sjælland, er omtrent 8 Meter højere. Her følge Tableauerne for de to nævnte Linier supplerede med Oversigter over et dobbelt geometrisk Nivellement mellem Punkterne \emptyset og F paa Sprogø og mellem H og S paa Sjælland, hvilket Supplement finder Anvendelse ved Sammendragningen af de to Linier til et enkelt Resultat for Overgangen til Sjælland.

Højklint *H*—Østenden.

(Afstand 8264 Meter. Højde 9 à 10 Meter.)

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.			Halvmillimeter.	
	<i>HØI.</i>	— <i>ØHII.</i>	Middeltal.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
Septbr. 28 F.	— 9.7557	+ 9.4428	— 0.1565	+ 35.4	1253.2
— 29 F.	10.2783	9.9000	0.1892	+ 68.1	4637.6
— 29 E.	9.5828	9.3507	0.1161	— 5.0	25.0
— 30 E.	9.2417	9.1074	0.0672	— 53.9	2905.2
Oktbr. 2 F.	9.7303	9.5502	0.0901	— 31.0	961.0
— 2 E.	9.6616	9.4662	0.0977	— 23.4	547.6
— 3 E.	9.9573	9.7013	0.1280	+ 6.9	47.6
— 4 F.	9.8149	9.5959	0.1095	— 11.6	134.6
— 5 F.	9.4415	9.2620	0.0898	— 31.3	979.7
— 6 E.	— 10.2390	+ 9.9045	— 0.1673	+ 46.2	2134.4
Partielsum	— 97.7031	+ 95.2810	— 1.2114	312.8	13625.9
Middelværdi	— 9.7703	+ 9.5281	— 0.1211	31.28	1362.59

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.			Halvmillimeter.	
	<i>HØII.</i>	— <i>ØHI.</i>	Middeltal.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
Septbr. 3 E.	— 9.0721	+ 11.0057	+ 0.9668	+ 33.7	1135.7
— 4 E.	8.8461	10.6847	0.9193	+ 81.2	6593.4
— 5 F.	8.6314	10.5454	0.9570	+ 43.5	1892.3
— 5 E.	8.7442	10.5585	0.9072	+ 93.3	8704.9
— 6 F.	8.4931	10.5536	1.0303	— 29.8	888.0
— 6 E.	8.2313	10.2777	1.0232	— 22.7	515.3
— 7 F.	8.8465	10.8697	1.0116	— 11.1	123.2
— 7 E.	8.5308	10.5785	1.0239	— 23.4	547.6
— 9 F.	8.4883	10.7836	1.1477	— 147.2	21667.8
— 10 F.	— 8.6749	+ 10.7107	+ 1.0179	— 17.4	302.8
Partielsum	— 86.5587	+ 106.5681	+ 10.0049	503.3	42371.0
Middelværdi	— 8.6559	+ 10.6568	+ 1.0005	50.33	4237.10
Totalsum	— 184.2618	+ 201.8491	+ 8.7935	816.1	55996.9
Middelværdi	— 9.2131	+ 10.0925	+ 0.4397	40.80	2799.85

Fyrbakken — Højklint S.

(Afstand 8224 Meter. Højde omtrent 17 Meter.)

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.			Halvmillimeter.	
	<i>FSI.</i>	<i>-SFI.</i>	Middeltal.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
Septbr. 5 F.	— 8.0605	+ 10.6982	+ 1.3189	— 87.8	7708.8
— 5 E.	7.9943	10.5385	1.2721	— 41.0	1681.0
— 6 F.	8.1090	10.5094	1.2002	+ 30.9	954.8
— 6 E.	7.6870	10.2666	1.2898	— 58.7	3445.7
— 7 F.	8.1387	10.6278	1.2446	— 13.5	182.3
— 7 E.	8.0533	10.4129	1.1798	+ 51.3	2631.7
— 8 E.	8.0150	10.5471	1.2661	— 35.0	1225.0
— 9 F.	8.2125	10.4556	1.1216	+109.5	11990.3
— 9 E.	7.9497	10.4697	1.2600	— 28.9	835.2
— 10 F.	— 8.0980	+ 10.4141	+ 1.1581	+ 73.0	5329.0
Partielseksum	— 80.3180	+104.9399	+12.3112	529.6	35983.8
Middelværdi	— 8.0318	+ 10.4940	+ 1.2311	52.96	3598.38
1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.			Halvmillimeter.	
	<i>FSII.</i>	<i>-SFI.</i>	Middeltal.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
Septbr. 28 E.	— 6.9113	+ 11.7123	+ 2.4005	— 60.8	3696.6
— 29 F.	7.1467	11.7856	2.3195	+ 20.2	408.0
— 29 E.	6.9064	11.5540	2.3238	+ 15.9	252.8
— 30 F.	6.7936	11.4705	2.3385	+ 1.2	1.4
Oktbr. 2 F.	6.9559	11.6505	2.3473	— 7.6	57.8
— 2 E.	6.9725	11.6971	2.3623	— 22.6	510.8
— 3 E.	6.9975	11.6157	2.3091	+ 30.6	936.4
— 4 F.	6.9712	11.5848	2.3068	+ 32.9	1082.4
— 5 E.	7.0007	11.7105	2.3549	— 15.2	231.0
— 7 F.	— 6.7667	+ 11.4350	+ 2.3342	+ 5.5	30.3
Partielseksum	— 69.4225	+116.2160	+23.3969	212.5	7207.5
Middelværdi	— 6.9423	+ 11.6216	+ 2.3397	21.25	720.75
Totalseksum	—149.7405	+221.1559	+35.7081	742.1	43191.3
Middelværdi	— 7.4870	+ 11.0578	+ 1.7854	37.11	2159.57

Østenden — Fyrbakken.

(Afstand 116 Meter.)

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.	Halvmillimeter.	
	Højdeforskel.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
August 15 F.	13.2091	— 1.0	1.0
— 15 E.	13.2071	+ 1.0	1.0
Sum	26.4162	2.0	2.0
Middelværdi	13.2081	1.0	1.0

Højklint *H* — Højklint *S*.

(Afstand 96 Meter.)

1896. Dato og Dagstid.	Halvmeter.	Halvmillimeter.	
	Højdeforskel.	<i>v</i>	<i>v</i> ²
Oktober 7 E.	15.4446	— 1.2	1.4
— 7 E.	15.4421	+ 1.3	1.7
Sum	30.8867	2.5	3.1
Middelværdi	15.4434	1.25	1.55

Under Henvisning til de i de fire sidste Tableauer opførte totale Middelværdier havestil Bestemmelse af Slutfejlen i Polygonen $\emptyset H S F \emptyset$

$$\emptyset H = - 0.4397$$

$$H S = + 15.4434$$

$$S F = - 1.7854$$

$$F \emptyset = - 13.2081$$

$$\text{Slutfejl} = + 0.0102$$

I næste Artikel paavises det, at denne Slutfejl skal fordeles paa de fire Sider med henholdsvis

$$0.0057, \quad 0.0001, \quad 0.0044 \quad \text{og} \quad 0.0000.$$

Henset hertil og til de i Tableauerne for VK og $\emptyset V$ opførte totale Middelværdier har man altsaa som Resultat af de reciproke Maalinger med supplerende geometrisk Nivellement

$$KV = -0.0258 \text{ Halvmeter}$$

$$V\emptyset = -1.0792 \quad -$$

$$\emptyset H = -0.4454 \quad -$$

$$\text{Sum} = -1.5504 \text{ Halvmeter,}$$

hvilken Sum fremstiller Højdeforskellen KH mellem Punkterne Højklint H paa Sjælland og Knudshoved paa Fyn.

IV.

Reciproke Maalinger. Middelfejl og Resultater.

Af de i de tre Tableauer over reciproke Maalinger opførte partielle og totale Middelværdier for Fejlkvadraterne bestemmes de tilsvarende Middelfejls Kvadrater ved at forøge nævnte Middelværdier med henholdsvis $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{9}$ og $\frac{1}{9}$ af deres Beløb. For Middelfejlskvadraterne m^2 svarende til Tableauernes i Kolonnen Middeltal opførte enkelte Værdier, der selv svare til Middeltal af 20 «enkelte Observationer», erholdes efter Ordenen, idet m er udtrykt i Halvmillimeter,

$$m^2 \quad 1832.5 \quad 3110.9 \quad 2399.5,$$

og for Middelfejlskvadratet μ^2 svarende til de totale Middelværdier, der ere sammendragne af henholdsvis

$$n \quad 40 \quad 20 \quad 20$$

til m^2 svarende Værdier,

$$\mu^2 \quad 45.81 \quad 155.55 \quad 119.98.$$

Heraf udledes for selve Middelfejlene m og μ

$$m \quad 42.81 \pm 4.91 \quad 55.78 \pm 9.05 \quad 48.98 \pm 7.94$$

$$\mu \quad 6.77 \pm 0.78 \quad 12.47 \pm 2.02 \quad 10.95 \pm 1.77,$$

idet man har tilføjet Bestemmelsernes Middelfejl.

De tre anførte Værdier for m svare til samme Observationsstørrelse paa alle tre Linier og skulde være lige store, hvis Afstande og øvrige Betingelser vare ganske ens. Dette er imidlertid kun tilnærmelsesvis Tilfældet; blandt andet er Afstandsforskellen stor nok til at udøve en meget kendelig Indflydelse, særlig paa Refraktionsfejlen, og det er i god Overensstemmelse hermed, at m er falden størst ud ved den største og mindst ved den mindste Afstand. Nævnte Refraktionsfejl er sikkert den langt overvejende paa større Afstande, og dette Forhold maa her træde saa meget stærkere frem som Vægtenheden svarer til 160 enkelte Indstillinger, hvorved den egentlige Iagttagelsesfejl maa være stærkt reduceret i Gennemsnittet. Divideres m med Kvadratet af den paagældende Afstand i Kilometer, altsaa efter Ordenen med

$$58.51 \quad 68.29 \quad 67.63,$$

vil man erholde nedenstaaende tre Værdier for den partielle fra de særlige Refraktionssvingninger hidrørende Kilometerfejl

$$0.732 \pm 0.084; \quad 0.817 \pm 0.132 \quad 0.724 \pm 0.117,$$

der henset til de tilføjede Middelfejl maa siges at stemme godt overens og derfor betegne de særlige Refraktionssvingninger som lidet forskellige ved de tre Linier¹⁾. Middelværdien

$$0.758 \pm 0.065$$

svarer til 2×10 altsaa 20 «enkelte Observationer» og giver ved Multiplikation med $\sqrt{20} = 4.472$

$$3.39 \pm 0.29,$$

som for Storebeltspassagen tør betragtes som et paalideligt Udtryk for Indflydelsen af de særlige Refraktionssvingninger paa den «enkelte Observations» Kilometerfejl.

¹⁾ Dette udelukker ikke, at selve Gennemsnitsrefraktionerne kunne være meget forskellige.

Vistnok indeholder den enkelte Observation 8 Indstillinger, men i den korte Tid, den omfatter, forandrer Refraktionen sig i Regelen ikke meget, og en Multiplikation af ovenstaaende Middelværdi med $\sqrt{8} = 2.83$ vil derfor sikkert give en for høj Grænse — 9.6 — for Virkningen af de særlige Refraktions-svingninger paa den enkelte Indstilling, ligesom den ovenstaaende Værdi — 3.4 — betegner en for lav Grænse. Det passer godt hermed, at Grænserne ved Overslagsregningen i Art. I er ansat til 2 og 4 Millimeter, altsaa til 4 og 8 Halv-millimeter.

Naar Middelfejlen paa et geometrisk Enkeltnivelle-ment betegnes ved m , erhoder man af de 3 Oversigter over Strækningerne ØV , ØF og HS efter Ordenen for Middelfejl-kvadraterne m^2

$$m^2 \quad 17.1 \quad 2.0 \quad 3.1,$$

og naar de tilsvarende Middelfejl paa Middelværdierne af fire — ØV — og to — ØF og HS — Enkeltnivellementer betegnes ved μ , for Kvadraterne μ^2

$$\mu^2 \quad 4.3 \quad 1.0 \quad 1.6.$$

Heraf fremgaar for Middelfejlene m og μ udtrykte i Halv-millimeter

$$\begin{array}{l} m \quad 4.1 \pm 1.7 \quad 1.4 \pm 1.0 \quad 1.8 \pm 1.3 \\ \mu \quad 2.1 \pm 0.9 \quad 1.0 \pm 0.7 \quad 1.2 \pm 0.9, \end{array}$$

der gælde for geometrisk Nivellement og ikke maa forvexles med de tidligere ogsaa ved m og μ betegnede Middelfejl paa reciproke Maalinger.

I Tableauerne er tillige opført Middelværdien af Fejlens numeriske Værdier. En saadan Middelværdi $\{v\}$ er for et nogen-lunde stort Antal Fejl knyttet til Middelværdien af Fejlkvadraterne $\{v^2\}$ ved Ligningen

$$\sqrt{\{v^2\}} = 1.2533 \{v\},$$

for saa vidt v 'erne ere underkastede exponentiel Fejllov. De tre

Tableauer for reciproke Maalinger, hvortil vi her indskrænke Betragtningen, da der ved det geometriske Nivellement indgaar saa faa Enkeltværdier i Middelværdierne, give umiddelbart

$\sqrt{\{v^2\}}$	41.72	52.91	46.47	Gennemsnit	47.03
1.2533 $\{v\}$	40.46	51.14	46.51	do.	46.04

og vise, at Fejlloven for v 'erne nærmer sig saa stærkt til den exponentielle, at man uden at begaa kendelige Fejl kunde have bestemt m af $\{v\}$ ved Formlen

$$m = 1.2533 \{v\} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 1.2533 \{v\} \left(1 + \frac{1}{2(n-1)}\right),$$

hvor n efter Ordenen har Værdierne 20, 10 og 10.

Med Hensyn til den i foregaaende Artikel udførte For-
deling af Slutfejlen σ paa Firkanten $\emptyset H S F$'s fire Sider bemærkes,
at Ligningen

$$(1) + (2) + (3) + (4) = \sigma,$$

hvor (1), (2), (3) og (4) efter Ordenen betegne Korrektionerne
paa de fire Sider begyndende med $\emptyset H$, giver

$$(1) = \frac{\mu_1^2}{[\mu^2]} \cdot \sigma, \quad (2) = \frac{\mu_2^2}{[\mu^2]} \cdot \sigma, \quad (3) = \frac{\mu_3^2}{[\mu^2]} \cdot \sigma, \quad (4) = \frac{\mu_4^2}{[\mu^2]} \cdot \sigma,$$

idet $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ betegne Middelfejlene paa de fire Polygon-
sider og $[\mu^2]$ Kvadratsummen af disse Middelfejl. Indsættes de
ovenfor anførte Talværdier afrundede til 1 Decimal, nemlig

$$\mu_1^2 = 155.5 \quad \mu_2^2 = 1.6 \quad \mu_3^2 = 120.0 \quad \mu_4^2 = 1.0$$

erholdes, idet

$$\sigma = 0.0102,$$

de i forrige Artikel anførte Talværdier

$$0.0057, \quad 0.0001, \quad 0.0044 \quad \text{og} \quad 0.0000$$

med Middelfjlskvadraterne 68.6, 1.6, 68.2, 1.0 beregnede af

Formlen

$$\mu_r^2 \left(1 - \frac{\mu_r^2}{[\mu^2]} \right),$$

hvortil efter Ordenen svarer de i Halvmillimeter udtrykte Middelfejl

$$8.28, \quad 1.25, \quad 8.26 \quad \text{og} \quad 1.00.$$

Under Henvisning til Slutningen af forrige og Middelfejlsbestemmelsen i nærværende Artikel anføres nedenfor som Resultat af de reciproke Maalinger og det supplerende geometriske Nivellement

$$KV = - 25.8 \pm 6.8 \text{ Halvmillimeter}$$

$$V\emptyset = - 1079.2 \pm 2.1 \quad -$$

$$\emptyset H = - 445.4 \pm 8.3 \quad -$$

$$\text{Sum} = - 1550.4 \pm 10.9 \text{ Halvmillimeter,}$$

altsaa Punktet Højklint H 's Højde over Knudshoved K :

$$KH = - 775.2 \pm 5.5 \text{ Millimeter.}$$

V.

Konstante Instrumentfejl, Jordkrumning og Middelrefraktion.

Som det fremgaar af de paagældende Ligninger i Art. II, indeholde de i Kolonnen «Middeltal» anførte to partielle Middelværdier for Observationerne før og efter Instrumentskiftet den samme konstante Fejl $\frac{1}{2}(I-II)$, dog med modsatte Fortegn, og denne Fejl, der elimineres i den totale Middelværdi, fremstiller sig derfor med dobbelt Beløb i Differensen mellem de nævnte partielle Middelværdier. Tages nu denne Differens for alle tre Linier, erholdes i Halvmeter

$$0 = - 1.0278 + (I-II),$$

$$0 = - 1.1216 + (I-II),$$

$$0 = - 1.1086 + (I-II).$$

Det vil allerede heraf ses, at Fejlen $(I-II)$ voxer med Længden af den paagældende Linie, som er henholdsvis 7.649,

8.264 og 8.224 Kilometer. For imidlertid at komme til fuld Klarhed over Forholdet reduceres disse Fejl til samme Afstand af 1 Kilometers Længde. Naar da Kilometerværdierne for I og II betegnes (1) og (2), og D er Afstanden i Kilometer, har man

$$I - II = D((1) - (2)),$$

hvorved ovenstaaende Ligninger kunne skrives

$$1.0278 = 7.649 ((1) - (2)),$$

$$1.1216 = 8.264 ((1) - (2)),$$

$$1.1086 = 8.224 ((1) - (2)).$$

Det vil let ses, at venstre Side af disse Ligninger have Middelfejlene 2μ , altsaa i den anførte Orden

$$13.5, \quad 24.9 \quad \text{og} \quad 21.9 \text{ Halvmillimeter,}$$

og de tre Ligninger give altsaa for (1) - (2) Værdierne

$$134.4 \pm 1.8 \text{ Halvmillimeter,}$$

$$135.7 \pm 3.0 \quad \text{—}$$

$$134.8 \pm 2.7 \quad \text{—}$$

$$\text{Middelværdi } 135.0 \pm 1.5 \text{ Halvmillimeter}$$

eller

$$(1) - (2) = 67.5 \pm 0.7 \text{ Millimeter.}$$

Naar man tager i Betænkning, at der indgaar i disse Værdier ikke blot tilfældige Observationsfejl, deri indbefattet en mulig mangelfuld Neutralisation af Refraktionssvingningerne, men ogsaa Hypothese fejl, deri indbefattet en mulig Forskel paa Gennemsnitsværdierne for Differensen $r' - r$ mellem de samtidige Refraktioner ved de tre Linier, saa maa Overensstemmelsen betegnes som særdeles god. Den største Forskel mellem to enkelte Værdier er mindre end Middelfejlen $0^{\text{mm}}.7$ paa alle tre Værdiers Middeltal og svarer til en Forskel af en Brøkdelt Mikron i Diametrene af et Instruments to Bærerings. Da nu dertil den gode Overensstemmelse ikke indskrænker sig til to,

men omfatter alle tre Linier, turde der være Grund til at antage, at den ikke er tilfældig, men giver Vidnesbyrd om den gode Beskaffenhed af det komplicerede Observationsarbejde og kontrollerer Rigtigheden af de Forudsætninger, hvorpaa Methode og Formler ere baserede. Strængt taget indeholder den erholdte Værdi for (1) — (2) tillige Forskellen imellem Værdierne af Størrelsen $\frac{1}{2} \frac{r' - r}{D}$ før og efter Instrumentskiftet, men denne Forskel maa aabenbart være forsvindende; thi havde den en fra Nul kendelig forskellig Værdi, kunde den næppe være ens for alle 3 Linier, særlig fordi de lokale Forhold tale for, at den maatte have forskelligt Fortegn Øst og Vest for Sprogø.

Medens man saaledes med stor Nøjagtighed kan bestemme Forskellen (1) — (2) i de to Instrumenters konstante Fejl, falder det vanskeligere at bestemme selve disse Fejl, fordi der ikke frembyder sig Midler til ved samme Linie at adskille dem fra Middelrefractionen, hvis Bestemmelse ved Sammenligning af Resultater fra de forskellige Linier bliver meget usikker, fordi disse Liniers Længder kun ere meget lidt, højst 600 Meter, forskellige fra hinanden. For hver Linie kan man danne en Ligning af Formen

$$\frac{-(AB1 + BA11)}{D} = x + Dy,$$

idet

$$x = (1) + (2) \quad \text{og} \quad y = 2 \frac{j-r}{D^2}$$

og følgelig betegne Kilometerværdierne henholdsvis for den konstante Fejlsum og for den dobbelte Jordkrumnings- og Refraktionskorrektion. Da Ligningerne kun tænkes anvendte paa Middelværdierne, særligt de totale Middelværdier, ere de samtidige Refraktioner i modsat Retning r og r' betragtede som lige store. Indføres de totale Middelværdier fra Tableauernes to første Kolonner, erholdes

$$\frac{16.1754}{7.649} = 2.1147 = x + 7.649 y,$$

$$\frac{19.3055}{8.264} = 2.3361 = x + 8.264 y,$$

$$\frac{18.5448}{8.224} = 2.2550 = x + 8.224 y.$$

De to nederste Ligninger maa foreløbig antages at have halv saa stor Vægt som den øverste og svare dertil begge til omtrent samme Distance og Forhold. Der turde derfor være Anledning til at ombytte dem med deres Middeltal, hvorved der til Bestemmelse af x og y erholdes

$$2.1147 = x + 7.649 y,$$

$$2.2956 = x + 8.244 y$$

eller ved Subtraktion

$$0.1809 = 0.595 y,$$

hvoraf atter

$$y = 0.3040, \quad x = -0.2106.$$

Hvis man udelader Linien FS og holder sig alene til Liniene KV og $\emptyset H$, faar man

$$y = 0.3600, \quad x = -0.6389,$$

og er det $\emptyset H$, der udelades, idet man baserer Regningen alene paa KV og FS , erholdes

$$y = 0.2440, \quad x = +0.2483.$$

Den store Forskel paa Værdierne af samme Størrelse, og da navnlig af x , vidner i tilstrækkelig Grad om Resultaternes store Ubestemthed. Imidlertid kan det dog være nyttigt at faa Forholdet noget sikrere oplyst igennem en Bestemmelse af Middelfejlene. Herved maa man lægge Mærke til, at de i Art. IV anførte Middelfejl ikke kunne lægges til Grund for Beregningen. De svare nemlig til Kolonnen «Middeltal» og indeholder kun den Del af den tilfældige Refraktionsfejl, som er særlig for hver af de to reciproke Retninger, medens den for begge Ret-

ninger fælles Del, der er den langt overvejende, gaar helt ud af Resultatet, saaledes som det nærmere forklares i næste Artikel. For at være sikker paa at faa alle vedkommende Fejlkilder med, har man fremstillet alle Værdierne af $-(ABI+BAII)$ og de dertil svarende Afvigelser v_1 fra deres partielle Middelværdier. Regningerne ere opførte i nedenstaaende tre Oversigter, en for hver af Linierne VK , $HØ$ og FS .

Vestenden — Knudshoved.

Halvmeter.	Halvmillimeter.		Halvmeter.	Halvmillimeter.	
$\frac{\div}{(VKI+KVI)}$	v_1	$v_1^2 \cdot 10^{-2}$	$\frac{\div}{(VKII+KVI)}$	v_1	$v_1^2 \cdot 10^{-2}$
16.8224	— 629.4	3961.4	16.0517	+ 106.0	112.4
17.3258	— 1132.8	12832.4	15.8884	+ 269.3	725.2
17.5717	— 1378.7	19008.1	15.5981	+ 559.6	3131.5
17.4783	— 1285.3	16520.0	15.6516	+ 506.1	2561.4
16.4942	— 301.2	907.2	15.8689	+ 288.8	834.1
16.4001	— 207.1	428.9	15.7752	+ 382.5	1463.1
16.9769	— 783.9	6145.0	15.9622	+ 195.5	382.2
16.8059	— 612.9	3756.5	16.2158	— 58.1	33.8
16.3935	— 200.5	402.0	16.1438	+ 13.9	1.9
15.7132	+ 479.8	2302.1	16.0704	+ 87.3	76.2
15.6041	+ 588.9	3468.0	17.2536	— 1095.9	12010.0
15.9070	+ 286.0	818.0	16.7655	— 607.8	3694.2
15.6865	+ 506.5	2565.4	16.6387	— 481.0	2313.6
15.4965	+ 696.5	4851.1	16.5405	— 382.8	1465.4
15.4256	+ 767.4	5889.0	16.2291	— 71.4	51.0
16.2959	— 102.9	105.9	16.0940	+ 63.7	40.6
15.5095	+ 683.5	4671.7	14.6546	+ 1503.1	22593.1
15.0371	+ 1155.9	13361.1	14.3046	+ 1853.1	34339.8
15.4854	+ 707.6	5007.0	17.8537	— 1696.0	28764.2
15.4309	+ 762.1	5808.0	17.5939	— 1436.2	20626.7
Sum 323.8605	13268.9	112808.8	323.1543	11658.1	135220.4
Middeltal 16.1930	663.45	5640.44	16.1577	582.91	6761.02
Total Sum = 647.0148				24927.0	248029.2
Total Middelværdi = 16.1754				6231.75	6200.73

Højklint *H*—Østenden.

Halvmeter.	Halvmillimeter.		Halvmeter.	Halvmillimeter.	
$\frac{\div}{(H\emptyset I + \emptyset H II)}$	v_1	$v_1^2 \cdot 10^{-2}$	$\frac{\div}{(H\emptyset II + \emptyset H I)}$	v_1	$v_1^2 \cdot 10^{-2}$
19.1985	+ 99.9	99.8	20.0778	— 765.1	5853.8
20.1783	— 879.9	7742.2	19.5308	— 218.1	475.7
18.9335	+ 364.9	1331.5	19.1768	+ 135.9	184.7
18.3491	+ 949.3	9011.7	19.3027	+ 10.0	1.0
19.2805	+ 17.9	3.2	19.0467	+ 266.0	707.6
19.1278	+ 170.6	291.0	18.5090	+ 803.7	6459.3
19.6586	— 360.2	1297.4	19.7162	— 403.5	1628.1
19.4108	— 112.4	126.3	19.1093	+ 203.4	413.7
18.7035	+ 594.9	3539.1	19.2719	+ 40.8	16.6
20.1435	— 845.1	7141.9	19.3856	— 72.9	53.1
Sum 192.9841	4395.1	30584.1	193.1268	2919.4	15793.6
Middeltal 19.2984	439.51	3058.41	19.3127	291.94	1579.36
Total Sum = 386.1109				7314.5	46377.7
Total Middelværdi = 19.3055				365.73	23188.85

Fyrbakken — Højklint *S*.

Halvmeter.	Halvmillimeter.		Halvmeter.	Halvmillimeter.	
$\frac{\div}{(FS I + SF II)}$	v_1	$v_1^2 \cdot 10^{-2}$	$\frac{\div}{(FS II + SF I)}$	v_1	$v_1^2 \cdot 10^{-2}$
18.7587	— 232.9	542.4	18.6236	— 59.7	35.6
18.5328	— 7.0	0.5	18.9323	— 368.4	1357.2
18.6184	— 92.6	85.7	18.4604	+ 103.5	107.1
17.9536	+ 572.2	3274.1	18.2641	+ 299.8	898.8
18.7665	— 240.7	579.4	18.6064	— 42.5	18.1
18.4662	+ 59.6	35.5	18.6696	— 105.7	111.7
18.5621	— 36.3	13.2	18.6132	— 49.3	24.3
18.6681	— 142.3	202.5	18.5560	+ 7.9	0.6
18.4194	+ 106.4	113.2	18.7112	— 147.3	217.0
18.5121	+ 13.7	1.9	18.2017	+ 362.2	1311.9
Sum 185.2579	1503.7	4848.4	185.6385	1546.3	4082.3
Middeltal 18.5258	150.37	484.84	18.5639	154.63	408.23
Total Sum = 370.8964				3050.0	8930.7
Total Middelværdi = 18.5448				1525.0	446.54

I disse Oversigter svare den venstre og højre Halvdel af Tableauet til lagttagelserne henholdsvis før og efter Instrumentskiftet, og de partielle Summer og Middelværdier ere anførte for neden i paagældende Halvdel, medens de totale Værdier, der omfatte hele Tableauet, ere anbragte nederst i den højre Halvdel.

Af de totale Middelværdier fremgaar Middelfejlkvadraterne for de tre Linier

m_1^2	652708	257654	49615
μ_1^2	16318	12883	2481
$\frac{\mu_1^2}{D^2}$	278.9	188.7	36.7
og Middelfjlene			
m_1	807.9	507.6	222.7
μ_1	127.7	113.5	49.8
$\frac{\mu_1}{D}$	16.7	13.7	6.1.

Det fremgaar af disse Middelfejl og da navnlig af $\frac{\mu_1^2}{D^2}$, at Sammen-
dragning af de to østlige Linier til en Middellinie rettest bør
ske efter Vægtene 1 og 5 og ikke efter samme Vægt. Herved
faar man til Bestemmelse af x og y

$$2.1147 = x + 7.649 y,$$

$$2.2685 = x + 8.231 y,$$

som give

$$y = 0.2643 \quad x = 0.0931,$$

der bedre end de tidligere Værdier stemme med Normalforholdene, hvortil der paa den Danske Sfæroide under Bredden $55^{\circ}20'$, Azimut 90° og med Refraktionsfaktoren $k = 0.125$ svarer $y = 0.2738$. For imidlertid at fjerne al Vilkaarlighed, behandles de tre Ligninger mellem x og y efter de mindste Kvadraters Methode med Vægtene $D^2:\mu_1^2$, og da det paa Grund af den ringe Forskel paa Liniernes Længde er de sidste Cifre i forholdsvis store Tal, det kommer an paa, er Regningen

gennemført med 7-cifrede Logarithmer. Saaledes erholdes

$$x = 0.0029 \pm 0.2464, \quad y = 0.2753 \pm 0.0302.$$

Værdien for y stemmer paafaldende godt med Normalværdien; men de store Middelfejl vise, at dette nærmest maa betragtes som et heldigt Tilfælde. Refraktionskoefficienten k , der svarer til den erholdte Værdi for y , bestemmes af

$$0.2753 \pm 0.0302 = 0.3129(1 - k)$$

og bliver

$$k = 0.1201 \pm 0.0965.$$

Herved er man gaaet ud fra samme Middelrefraktion paa de tre Linier. Hvis man med den fundne Værdi for x vilde beregne y af Betingelsesligningerne og deraf Refraktionskoefficienten, vilde man erholde ret forskellige Værdier for nævnte tre Linier, nemlig

$$k \quad 0.1176 \quad 0.0978 \quad 0.1249.$$

Disse Koefficienter ere ligesom den ovenfor fundne Middelværdi meget usikre, væsentlig paa Grund af den højst usikre Værdi for x ; men Forskellen imellem dem er forholdsvis bedre bestemt, thi den er næsten uafhængig af x . Gives nemlig x en vilkaarlig Tilvæxt Δx , vil den dertil svarende Tilvæxt Δk paa k for de tre Linier være

$$\Delta k \quad 0.418 \Delta x \quad 0.387 \Delta x \quad 0.389 \Delta x,$$

der viser, at Differenserne mellem de tre Værdier af Δk kun afvige fra hinanden med højst $0.03 \Delta x$, medens selve Forandringen Δk i k er omtrent 13 Gange større, nemlig paa det nærmeste $0.4 \Delta x$.

Som allerede tidligere fremhævet, beror den store Usikkerhed i x paa Vanskeligheden ved at skille denne Størrelse fra y , naar Afstandene ere saa lidet forskellige som de her forekommende — Afstandene ere i Gennemsnit omtrent 8 Km. og deres indbyrdes Forskel er højst 0.6 Km. — Hvis nævnte Forskel havde været 3 à 4 Km., vilde Middelfejlene være faldne

betydelig mindre ud, idet de da vilde gaa ned til henimod 0.1 af de ovenfor anførte Beløb.

Kombineres Værdien (1) + (2) = $x = 0.0029$ med den i Begyndelsen af nærværende Artikel udledede Værdi (1) - (2) = 0.1350, erholdes i Millimeter

$$(1) = 34.5 \pm 61.6, \quad (2) = -33.0 \pm 61.6 \text{ Millimeter,}$$

hvor de tilføjede Middelfejl i tilstrækkelig Grad udtrykke Usikkerheden af dette Resultat, navnlig i Modsætning til den store Nøjagtighed, hvormed (1) - (2) er bestemt.

VI.

Samtidig Observation i begge Punkter forøger i høj Grad Nøjagtigheden af de reciproke Maalingers Resultat.

Den i forrige Artikel omtalte Middelfejl m_1 , der svarer til Fejlene v_1 , i Forbindelse med den tidligere fundne Middelfejl m , der svarer til Fejlene v , afgiver et Mittel til at vurdere den Tilvæxt i Nøjagtighed, som hidrører fra Samtidighed i Observationerne paa begge de korresponderende Stationer. Naar i et givet Øjeblik Refraktionsforholdene afvige fra Gennemsnitsforholdene svarende til den samlede Observationstid paa Stationen, kunne vi tænke os denne Afvigelse opløst i to Bestanddele, hvoraf den ene frembringer en fælles Fejl f' , som er nøjagtig ens paa begge samtidige Maalinger i modsat Retning, medens den anden frembringer særskilte Fejl s' og s'' paa de to nævnte Maalinger. Gaaes der nu ud fra, at s' og s'' foruden den særskilte Refraktionsfejl tillige indeholder selve Observationsfejlene, saa har man for Fejlene v_1 og v :

$$v_1 = 2f' + s' + s'' \quad \text{og} \quad v = \frac{1}{2}(s' - s'')$$

og for de tilsvarende Middelfejl

$$m_1^2 = 4f'^2 + 2s^2 \quad \text{og} \quad m^2 = \frac{1}{2}s^2,$$

idet Middelfejlene paa den fælles og den særskilte Refraktion betegnes ved f og s . Af ovenstaaende Udtryk erholdes da

$$f^2 = \frac{1}{4} m_1^2 - m^2 \quad \text{og} \quad s^2 = 2m^2.$$

Indføres heri de i Art. IV og V for m^2 og m_1^2 anførte Værdier, fremstilles let nedenstaaende Oversigt, hvori Værdierne

f^2	s^2	f	s	$\frac{f}{D^2}$	$\frac{s}{D^2}$	$\frac{f}{s}$
161344	3666	401.7	60.5	6.87	1.03	6.64
61303	6222	247.6	78.9	3.63	1.16	3.14
10004	4799	100.0	69.3	1.48	1.02	1.44
Gennemsnit =				3.99	1.07	3.74

i de to næstsidste Kolonner ere reducerede til samme Afstand, nemlig 1 Kilometer. Den fælles Refraktionsfejl fremtræder da med stor Forskellighed ved de tre Linier, saa at Gennemsnitsbetingelserne under Observationerne ikke kunne have været ens ved disse Linier. Ved de to første, KV og ØH , der omtrent ligge i samme Højde over Havfladen, og ved Endepunkterne gaa over et ensartet Landterrain af meget ringe Udstrækning, maa Forskellen navnlig søges i de meteorologiske Betingelser; ved den sidste, FS , der ligger 7 à 8 Meter højere, er det øjensynligt, at den større Højde har medført mindre stærke Refraktionssvingninger og dermed en Formindskelse i den fælles Refraktionsfejl. Denne store Forskel i Fællesfejlen, der ved de tre Linier kan udtrykkes ved Forholdet 9 : 5 : 2, forhindrer imidlertid ikke, at den særlige Refraktionsfejl paa det nærmeste er ens og forholdsvis lille ved alle Linierne. Dens Kilometerværdi er nemlig omtrent en Halvmillimeter, medens f 's Kilometerværdier ere 6.9, 3.6 og 1.5 eller i Gennemsnit 4 Halvmillimeter. Medens nu ved samtidige reciproke Maalinger den enkelte Observation indgaar paa Højdedifferensen

med Middelfejlen s , vil den ved ikke samtidige reciproke Maalinger indgaa med Middelfejlen $\sqrt{f^2 + s^2}$. Dette er ensbetydende med at tillægge et Par samtidige Maalinger Vægten $\sqrt{\frac{f^2}{s^2} + 1}$, naar der gaaes ud fra Vægten 1 for et Par ikke samtidige Maalinger af iøvrigt samme Kvalitet.

Ifølge Oversigten ere Værdierne af Forholdet $\frac{f^2}{s^2} + 1$ ved de tre Linier omtrent 45, 11 og 3, altsaa Gennemsnitsværdien paa det nærmeste 20. Disse Tal ere meget oplysende med Hensyn til Betydningen af Samtidigheden. Holde vi os til Gennemsnitsværdien, bliver Undersøgelsens Resultat, at den Nøjagtighed, som i nærværende Sammenhæng er opnaaet ved 800 reciproke Maalinger, der to og to ere samtidige, vilde fordre henimod 16000 saadanne Maalinger, naar man opgav Samtidigheden og indskrænkede sig til en enkelt Observator og et enkelt Instrument.

Hvis man vilde samle alle Maalingerne med Instrument I til en Værdi for Højdedifferensen og dem med Instrument II til en anden, vilde Forskellen mellem de to Værdier kunne naa op til 90, 82 og 38 Halvmillimeter uden at paagældende Middelfejl derved overskrides. I Virkeligheden stiller Forskellen sig her langt mindre, idet den bliver 18.5, 7.2 og 19.0; men disse forholdsvis smaa Tal forliges jo godt med ovennævnte betydelig større Middelfejl.

VII.

Maalingerne fra den nøjagtige Midte.

Som alt fremhævet i Slutningen af Art. I, frembyder Metoden fra den nøjagtige Midte langt lettere Betingelser for selve Observationerne end de reciproke Maalinger, men til Gen-gæld kunne Forberedelserne kræve et betydeligt Arbejde. Først skal man nemlig bestemme den nøjagtige Midte. Dette kunde her ikke opnaas med den fordrede Nøjagtighed alene ved Hjælp af de for Haanden værende Kaart; det var nødvendigt at udføre

en Triangulation, der baseredes paa tre af Generalstabens trigonometriske Stationer, nemlig Rersø, Halskov og Omø. Herved bestemtes et Punkt P , der paa Meter nøje har samme Afstand fra Punkterne Knudshoved K og Højklint H . Halveringslinien af Vinklen HPK fremstiller da Stedet for Punkterne, som opfylde Afstandsbetingelsen. Men foruden Afstanden er der endnu to andre Fordringer at søge opfyldte, nemlig at Stationen omtrent har samme Højde over Havfladen som Punkterne H og K og ganske særlig, at Refraktionsbetingelserne i de to Retninger, mod H og mod K , ikke ere kendelig forskellige. Der gives imidlertid intet Terrainpunkt i Halveringslinien, som samtidig tilfredsstiller begge Fordringer; man valgte derfor to Punkter, hvoraf det ene P norden for Sprogøgaard opfyldte Højdebetingelsen, medens det andet M sønden for denne Gaard laa langt lavere, men til Gengæld øjensynlig frembød samme Refraktionsbetingelser i begge Retninger, idet Sigterne MH og MK gik saa at sige udelukkende over Vand og kun nogle faa Meter paa begge Sider af M over fladt Land. Uagtet man fra første Færd var klar over, at Maalingerne fra P ikke burde benyttes ved selve Højdebestemmelsen, besluttede man dog at gennemføre Observationerne paa begge Stationer, navnlig for at kontrollere om Afvigelsen gik i den forudsete Retning, d. v. s. saaledes at HK maalt fra P blev for lille, og for at faa et Begreb om dens Størrelse. Vistnok maatte man vente, at Observationerne fra den lave Station maatte vise betydelige Refraktionssvingninger; men dette er ved et stort Antal Observationer af mindre Betydning, naar kun Middelrefractionen tør antages ens til begge Sider. Desuden havde man den Udvej at forhøje den lave Station, og dette blev efter Forslag af Oberstløjtnant Rasmussen ogsaa udført, idet Observationspillen i M , efter at 400 Iagttagelser vare udførte fra den i 1896, i Foraaet 1897 forhøjedes saaledes, at Kikkerten under Maalingen derfra omtrent fik samme Højde over Havfladen som Sigtepunkterne i H og K . Pillen blev omtrent 9 Meter høj, Siden

i dens kvadratiske Fundament er over 3 Meter, men Tversnittet indsnævres opefter, saaledes at Pillens øverste Flade omtrent er 0.5 Meter i Kvadrat. Til Standplads for Observator byggedes udenom Pillen og uafhængig af denne et Træstillads med særligt Fundament. Det hele Arbejde var under de givne Forhold ikke ubetydeligt, men Foranstaltningen viste sig hensigtsmæssig, og Iagttagelserne fra den høje Station afgive et særdeles godt Bidrag til Bestemmelse af Højdeforskellen *HK*.

Observationen ved Methoden fra Midten bestaar i alternérende Indstilling af de to Objekter med Aflæsning af Libelle og Mikrometer. For den enkelte Iagttagelse af et Objekt er Skemaet

$$L, M, M, M, M, L,$$

idet *L* betegner Aflæsning af begge Libeller, *M* Indstilling og Aflæsning af Mikrometer, og den enkelte Iagttagelse bestaar altsaa af 4 Indstillinger og Mikrometeraflæsninger indesluttede af Aflæsninger paa Dobbeltlibellen. En Observationsgruppe sammendrages af en Række, i Regelen 10, saadanne enkelte Iagttagelser, og Forskellen mellem Gruppens Gennemsnitsværdier for de to Objekter, korrigerede for Sigtepunkternes Højde over det paagældende Nivellements punkt, giver da Gruppeværdien for den søgte Højdedifferens. For at de to Gennemsnitsværdier indenfor en Gruppe kunne betragtes som samtidige, kan den alternerende Observation bringes til at slutte med Begyndelsesobjektet ved f. Ex. at rette to paa hinanden følgende Iagttagelser midt i Gruppen mod det andet Objekt.

Nedenfor fremstilles i to Oversigter, den ene for den lave, den anden for den høje Station Sprogø \mathfrak{M} Grupperesultaterne med deres Afvigelse v_2 fra Gennemnittet efter Vægt, samt Afvigelse og deres Kvadraters Værdier og Middelværdier ligeledes efter Vægt. For Rubriken $v_2\sqrt{p}$ svare Sum og Middelværdi til de numeriske Værdier.

Observationerne paa begge Stationer \mathfrak{M} ere udførte af Premierløjtnant N. P. J o h a n s e n.

Sprogø. Lav Station M.

(Afstand 8500 Meter. Højde omtrent 3 Meter.)

Nr.	1896. Dato og Dagstid.	Antal Obs.	Vægt. p	Halvmeter.		Halvmillimeter.		
				HK	$p.HK$	v_2	$v_2\sqrt{p}$	$p v_2^2$
1	August 23 E.	8	0.8	1.6541	1.3233	-117.4	-105.0	11026
2	— —	10	1	1.4612	1.4612	+ 75.5	+ 75.5	5700
3	— 24 E.	10	1	1.7390	1.7390	-202.3	-202.3	40925
4	— —	10	1	1.6821	1.6821	-145.4	-145.4	21141
5	— 25 F.	8	0.8	1.2725	1.0180	+264.2	+236.3	55841
6	— — E.	10	1	1.5931	1.5931	- 56.4	- 56.4	3181
7	— —	10	1	1.3459	1.3459	+190.8	+190.8	36405
8	— —	6	0.6	1.3384	0.8030	+198.3	+153.6	23594
9	— 26 F.	5	0.5	1.6689	0.8345	-132.2	- 93.5	8738
10	— 27 F.	10	1	1.3434	1.3434	+193.3	+193.3	37365
11	— —	10	1	1.5519	1.5519	- 15.2	- 15.2	231
12	— — E.	10	1	1.6788	1.6788	-142.1	-142.1	20192
13	— —	10	1	1.4950	1.4950	+ 41.7	+ 41.7	1739
14	— —	10	1	1.3022	1.3022	+234.5	+234.5	54990
15	— 28 E.	10	1	1.7299	1.7299	-193.2	-193.2	37326
16	— —	10	1	1.6327	1.6327	- 96.0	- 96.0	9216
17	— —	10	1	1.2189	1.2189	+317.8	+317.8	100997
18	— —	5	0.5	1.1283	0.5642	+408.4	+288.8	83395
19	— 29 E.	1	0.1	1.3483	0.1348	+188.4	+ 59.6	3549
20	— 31 F.	10	1	1.3945	1.3945	+142.2	+142.2	20221
21	— —	6	0.6	1.4406	0.8644	+ 96.1	+ 74.4	5541
22	Septbr. 19 F.	10	1	1.6088	1.6088	- 72.1	- 72.1	5198
Overførelsessum		189	18.9	32.6285	28.3196		3129.7	586511

Sprogø. Lav Station M (fortsat).

Nr.	1896. Dato og Dagstid.	Antal Obs.	Vægt. p	Halvmeter.		Halvmillimeter.		
				HK	$p.HK$	v_2	$v_2\sqrt{p}$	$p v_2^2$
	Overført Sum	189	18.9	32.6285	28.3196		3129.7	586511
23	Septbr. 19 E.	5	0.5	1.4176	0.7088	+119.1	+ 84.2	7092
24	— 20 F.	10	1	1.9368	1.9368	-400.1	-400.1	160080
25	— 22 F.	10	1	1.5618	1.5618	- 25.1	- 25.1	630
26	— —	10	1	1.6681	1.6681	-131.4	-131.4	17266
27	— —	10	1	1.8222	1.8222	-285.5	-285.5	81510
28	— — E.	10	1	1.3195	1.3195	+217.2	+217.2	47176
29	— —	5	0.5	1.2972	0.6486	+239.5	+169.4	28680
30	— 23 F.	1	0.1	1.4785	0.1479	+ 58.2	+ 18.4	339
31	— 24 F.	10	1	1.7167	1.7167	-180.0	-180.0	32400
32	— —	9	0.9	1.6895	1.5206	-152.8	-145.0	21013
33	— —	10	1	1.7538	1.7538	-217.1	-217.1	47132
34	— —	5	0.5	1.7258	0.8629	-189.1	-133.7	17879
35	— 25 E.	10	1	1.4596	1.4596	+ 77.1	+ 77.1	5944
36	— —	10	1	1.4703	1.4703	+ 66.4	+ 66.4	4409
37	— —	6	0.6	1.4505	0.8703	+ 86.2	+ 66.8	4458
38	— 26 F.	10	1	1.7901	1.7901	-253.4	-253.4	64212
39	— —	10	1	1.7472	1.7472	-210.5	-210.5	44310
40	— —	10	1	1.4876	1.4876	+ 49.1	+ 49.1	2411
41	— — E.	10	1	1.2478	1.2478	+288.9	+288.9	83463
42	— —	10	1	1.2618	1.2618	+274.9	+274.9	75570
	Sum	360	36.0	63.9309	55.3220		6423.9	1332485
	Middelværdi			1.5222	1.5367		153.0	31726

Sprogø. Høj Station M.

(Afstand 8500 Meter. Højde omtrent 10 Meter.)

Nr.	1897. Dato og Dagstid.	Antal Obs.	Vægt. p	Halvmeter.		Halvmillimeter.		
				HK	$p.HK$	v_2	$v_2\sqrt{p}$	$p v_2^2$
1	Juni 6 E.	10	1	1.6104	1.6104	- 81.5	- 81.5	6642
2	— —	10	1	1.7769	1.7769	-248.0	-248.0	61504
3	— 7 F.	10	1	1.6689	1.6689	-140.0	-140.0	19600
4	— — E.	10	1	1.5214	1.5214	+ 7.5	+ 7.5	56
5	— —	2	0.2	1.5634	0.3127	- 34.5	- 15.4	238
6	— 8 F.	10	1	1.6516	1.6516	-122.7	-122.7	15055
7	— —	10	1	1.5470	1.5470	- 18.1	- 18.1	328
8	— — E.	10	1	1.5412	1.5412	- 12.3	- 12.3	151
9	— 9 F.	10	1	1.5923	1.5923	- 63.4	- 63.4	4020
10	— 25 F.	10	1	1.4851	1.4851	+ 43.8	+ 43.8	1918
11	— —	10	1	1.4785	1.4785	+ 50.4	+ 50.4	2540
12	— — E.	10	1	1.7027	1.7027	-173.8	-173.8	30206
13	— —	10	1	1.6343	1.6343	-105.4	-105.4	11109
14	— —	10	1	1.6936	1.6936	-164.7	-164.7	27126
15	— 26 F.	10	1	1.5461	1.5461	- 17.2	- 17.2	296
16	— 27 F.	10	1	1.7389	1.7389	-210.0	-210.0	44100
17	Juli 22 E.	3	0.3	1.7964	0.5389	-267.5	-146.5	21467
18	— 23 F.	5	0.5	1.4700	0.7350	+ 58.9	+ 41.7	1735
19	— — E.	10	1	1.4997	1.4997	+ 29.2	+ 29.2	853
20	— —	10	1	1.4989	1.4989	+ 30.0	+ 30.0	900
21	— 24 F.	10	1	1.5294	1.5294	- 0.5	- 0.5	0
22	— —	10	1	1.6060	1.6060	- 77.1	- 77.1	5944
Overførelsessum		200	20.0	35.1527	31.9095		1799.2	255788

Sprogø. Høj Station M (fortsat).

Nr.	1897. Dato og Dagstid.	Antal Obs.	Vægt. p	Halvmeter.		Halvmillimeter.		
				HK	$p HK$	v_2	$v_2 \sqrt{p}$	$p v_2^2$
	Overført Sum	200	20.0	35.1527	31.9095		1799.2	255788
23	Novbr. 4 F.	10	1	1.3811	1.3811	+147.8	+147.8	21845
24	— —	10	1	1.4239	1.4239	+105.0	+105.0	11025
25	— — E.	10	1	1.3992	1.3992	+129.7	+129.7	16822
26	— —	10	1	1.3679	1.3679	+161.0	+161.0	25921
27	— 7 F.	10	1	1.3885	1.3885	+140.4	+140.4	19712
28	— —	10	1	1.2978	1.2978	+231.1	+231.1	53407
29	— —	10	1	1.4379	1.4379	+ 91.0	+ 91.0	8281
30	— — E.	10	1	1.5228	1.5228	+ 6.1	+ 6.1	37
31	— —	10	1	1.5121	1.5121	+ 16.8	+ 16.8	282
32	— —	10	1	1.4800	1.4800	+ 48.9	+ 48.9	2391
33	— —	1	0.1	1.5344	0.1534	— 5.5	— 1.7	3
34	— 8 F.	10	1	1.5376	1.5376	— 8.7	— 8.7	76
35	— —	10	1	1.5137	1.5137	+ 15.2	+ 15.2	231
36	— — E.	10	1	1.4495	1.4495	+ 79.4	+ 79.4	6304
37	— —	10	1	1.5838	1.5838	— 54.9	— 54.9	3014
38	— —	10	1	1.4816	1.4816	+ 47.3	+ 47.3	2237
39	— 9 E.	10	1	1.4882	1.4882	+ 40.7	+ 40.7	1656
40	— —	10	1	1.6110	1.6110	— 82.1	— 82.1	6740
41	— —	10	1	1.5426	1.5426	— 13.7	— 13.7	188
42	— —	10	1	1.4552	1.4552	+ 73.7	+ 73.7	5432
43	— 10 F.	10	1	1.3728	1.3728	+156.1	+156.1	24367
	Sum	401	40.1	65.9343	61.3101		3450.5	465759
	Middelværdi			1.5334	1.5289		80.2	10832

Af de to Oversigter over Resultaterne af Maalingerne fra Midten fremgaar for den lave Station \mathfrak{M} :

$$KH = -1.5367 \pm 0.0300$$

og for den høje Station \mathfrak{M}

$$KH = -1.5289 \pm 0.0166.$$

Ved at sammendrage disse to Værdier efter de ved de tilføjede Middelfejl bestemte Vægte erholdes

$$KH = -765.4 \pm 7.3 \text{ Millimeter,}$$

der saaledes bliver Resultatet af Maalingerne fra den nøjagtige Midte.

Det er ikke uden Interesse at underkaste Middelfejlene en noget nærmere Undersøgelse for at komme til Kundskab om, hvorledes de stemme med tilsvarende Middelfejl paa de reciproke Maalinger. Vi betragte da Middelfejlen m_2 paa Vægtenheden — Grupperesultatet af 10 Maalinger til hvert af de to Objekter — og finde den dertil svarende Kilometerværdi ved Division med $(8.5)^2 = 72.3$. Man faar i Halvmillimeter for den lave og for den høje Station henholdsvis

$$m_2 \quad 180.3 \quad \text{og} \quad 105.3$$

eller ved Division med 72.3 de tilsvarende Kilometerværdier

$$\frac{m_2}{D^2} \quad 2.49 \quad \text{og} \quad 1.46.$$

Men disse Middelfejl svare til Højdedifferensen KH [og maa divideres med $\sqrt{2}$ for at give Middelfejlen paa et Grupperesultat for et af Objekterne,

$$\frac{s_2}{D^2} \quad 1.76 \quad \text{og} \quad 1.03 \text{ Halvmillimeter.}$$

Ifølge Oversigten i Art. VI er Gennemsnittet af Kilometerværdierne for den særlige Refraktionsfejll ved reciproke Maalinger

$$\frac{s}{D^2} = 1.07 \text{ Halvmillimeter,}$$

der for den høje Station stemmer godt med $\frac{S_2}{D^2}$, uagtet der ved reciproke Maalinger indgaar dobbelt saa mange Indstillinger i Observationen som i den tilsvarende fra Midten, nemlig i et Grupperesultat henholdsvis 80 og 40. Dette bekræfter den tidligere Paastand om, at Observationsfejlene forsvinde lige overfor Refraktionsfejlen ved saa lange Sigter, som der her er Tale om, og denne Refraktionens overvejende Indflydelse forklarer ogsaa den forholdsvis store Kilometerværdi 1.76 for den lave Station; thi ved denne, hvor Sigterne paa en lang Strækning nærmest Stationen stryge tæt hen over Vandfladen, maa forbigaaende Forskellighed i Omstændighederne til begge Sider spille en større Rolle end ved den høje Station, der ligger i Niveau med Sigtepunkterne i H og K , og for hvilken Forholdene ret naturligt maa blive de samme som paa de Stationer, hvorfra de reciproke Maalinger gennemførtes.

Refraktionens alt overvejende Indflydelse paa Grupperesultaternes Middelfejl kunde ved første Øjekast fremkalde Betænkelighed ved at tillægge disse Resultater Vægt efter det Antal enkelte Iagttagelser, hvoraf de sammendrages, og opfordre til at give dem alle samme Vægt uafhængig af det nævnte Antal. Herimod taler imidlertid, at man overalt har tilstræbt at sammensætte Grupperne af 10 enkelte Iagttagelser, og naar dette undtagelsesvis ikke er lykkedes, ligger det i abnorme Forhold, som maa bevirke en Forringelse i Grupperesultatets Vægt, en Forringelse, der er desto større, jo mere det opnaaede Antal afviger fra det normale, og derfor gør det ret plausibelt at sætte Vægtene proportionale med nævnte Antal. Til Beroligelse for Læsere, som maatte finde dette Raisonnement for ubestemt til derpaa at basere en Vægtbestemmelse, skal bemærkes, at en Sammendragning af alle Grupper til simple Middeltal, altsaa efter samme Vægt, vel vil forøge Resultatet for den lave Station med omtrent $7^{\text{mm}}.3$, men til Gengæld formindske Værdien for den høje Station med henimod $2^{\text{mm}}.3$, og da de to Stationer sammendrages efter de omtrentlige Vægte 1 og 3, bliver det

samlede Resultat højst et Par Tiendedele af en Millimeter forskelligt fra det tidligere erholdte, der baseredes paa Vægtbestemmelse efter Antal.

Ovenfor er omtalt, at man ogsaa har foretaget Observationer fra den høje Station *P* paa Sprogø, og det i samme Omfang — 400 enkelte Iagttagelser til hvert Objekt — som fra hver af Stationerne *M*; men det er tillige omtalt, at man forud havde betegnet Observationerne paa denne Station som uskikkede til at indgaa i Højdebestemmelsen. Vi skulle derfor ikke her give nogen Oversigt over denne Stations Grupperesultater, men indskrænke os til at anføre, at det af alle 46 Grupper sammen- dragne Resultat giver *HK* en 52^{mm} mindre Værdi end ovenfor udledet af Stationerne *M*. Dette tyder paa en mindre Refraktion fra *P* i Retningen mod *K* end imod *H*, hvilket stemmer med hvad man forud havde tænkt sig, idet Landsigtet umiddelbart ved Stationen baade er længere og nærmere ved Jordoverfladen i Retningen mod *K* end imod *H*. Uoverensstemmelsen 52^{mm} forklares fuldt ud ved en Forskel af $\frac{1}{14}$ i de to Retningers Middelrefraktionskoefficienter, saaledes at nævnte Koefficient, naar den eksempelvis ansættes til 0.14 i Retningen mod *H*, vil være omtrent 0.13 i Retningen mod *K*.

Endnu skal bemærkes, at Eftermiddagsobservationerne fra de høje Stationer *M* og *P* gennemgaaende give en større Værdi for *HK* end Formiddagsobservationerne, hvilket tyder paa, at Refraktionen under Maalingen fra disse Stationer har været større i Retning mod Solen end i den modsatte Retning. Ved den lave Station finder netop det omvendte Sted; her er det Formiddagsiagttagelserne, der give størst Resultat for *HK*. Paa den lave Station *M* og den høje Station *P* er der observeret samtidigt, og Oberstløjtnant M o m b e r g har ved at sammen- stille disse Iagttagelser paavist, at de samtidige Afvigelser fra Gennemsnittet for hver af de to Stationer saa at sige kompensere hinanden, idet disse Afvigelser gennemgaaende vise modsat Fortegn paa de to Stationer. Vi skulle ikke forsøge nogen

Forklaring af dette mærkelige Fænomen, der her kun anføres som et Kuriosum.

VIII.

**Betydningen af de erholdte Resultater under Hensyn til
Lodafvigelsen.**

De erholdte Værdier for Højdeforskellen ere for begge Methoders Vedkommende at betragte som Maalingsresultater¹⁾, der ikke nøjagtigt svare til Sfæroiden, og som heller ikke, saaledes som Tilfældet er med Resultaterne af et geometrisk Nivellement i fladt Terrain, kunne betegnes som umiddelbart henførte til Geoiden. Grunden maa søges i Lodafvigelsen, og for at komme til Klarhed over dennes Indflydelse ville vi først reducere Resultaterne til Sfæroiden og derefter fra Sfæroiden til Geoiden, en Fremgangsmaade, der er udtrykt ved Formlen

$$\text{Geometrisk } KH = \text{maalt } KH + \text{Reduktion til Sfæroiden} \\ + \text{Reduktion fra Sfæroiden til Geoiden.}$$

Det sees, at den samlede Reduktion er uafhængig af Referenssfæroidens Stilling, og at man derfor kan anbringe denne saaledes, at Lodafvigelserne i H og K blive ligestore med modsat Fortegn. Betegner man de tre oprindelige Lodafvigelser ved L' , L og L'' henholdsvis for Fynsiden, Sprogø og Sjælland-siden, saa erholder man de reducerede Lodafvigelser l' , l og l'' , ved Subtraktion af $\frac{1}{2}(L' + L'')$ fra de tilsvarende oprindelige, altsaa

$$l' = \frac{1}{2}(L' - L''), \quad l = L - \frac{1}{2}(L' + L''), \quad l'' = \frac{1}{2}(L'' - L')$$

og Betingelsen $l'' = -l'$ er altsaa opfyldt. Alle her omtalte Lodafvigelser svare til Retningen Øst-Vest og regnes positive, naar Zenith afviger mod Øst, altsaa naar Geoidetangenten i Retning mod Øst falder under Sfæroidetangenten.

¹⁾ Jvfr. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie I S. 520 og II S. 584 og 607—608.

For at bestemme den sfæroidiske Reduktion bemærkes først, at Korrektionerne paa de maalte Zenithdistancer for de 3 Stationer Knudshoved, Sprogø og Højklint blive henholdsvis

$$+l' \quad -l, \quad +l \quad -l'' = +l',$$

hvor de to Værdier for Sprogø svare til Sigter mod Fyn og mod Sjælland. Ved reciproke Maalinger bliver da Korrektionen paa Overgangen fra Fyn til Sprogø $-\frac{1}{2}(l+l')D$, og ved Overgangen fra Sprogø til Sjælland $+\frac{1}{2}(l-l)D$ saa at man erholder

$$\text{Sfæroidisk Reduktion for } KH = -lD.$$

Ved Maalingerne fra Midten bliver derimod Korrektionerne paa Sigtet til Fyn $-lD$ og paa Sigtet til Sjælland $+lD$, saa at man for Methoden fra Midten erholder

$$\text{Sfæroidisk Reduktion for } KH = -2lD.$$

Udtrykket for Reduktionen til Geoiden bliver aabenbart

$$\int_0^{2D} l_s ds,$$

idet l_s betegner Lodafvigelsen i et Punkt, der ligger i Afstanden s østen for Knudshoved. Antager man nu, at l_s er en algebraisk Funktion af anden Grad, altsaa af Formen

$$l_s = l' + as + bs^2,$$

saa har man til Bestemmelse af a og b , at der til Værdierne D og $2D$ for s svarer Værdierne l og $-l'$ for l_s . Herved erholdes

$$l_s = l' + (2l-l') \frac{s}{D} - l \frac{s^2}{D^2},$$

som integreret giver

$$\left\{ s \left(l' + \frac{2l-l'}{2} \frac{s}{D} - \frac{l}{3} \frac{s^2}{D^2} \right) \right\}_0^{2D},$$

og man faar altsaa

$$\text{Reduktion til Geoiden} = +\frac{4}{3}lD.$$

Under den givne Forudsætning om Lodafvigelsens Variation, bliver den samlede Reduktion følgelig

$$+\frac{1}{3}lD \quad \text{og} \quad -\frac{2}{3}lD$$

henholdsvis for reciproke Maalinger og Methoden fra Midten. Ved begge Metoder er Reduktionen Nul, naar l er Nul, hvilket svarer til en med Afstanden proportional Variation i Lodafvigelsen, altsaa til Cirkelbuen som Snit i Geoiden i øst-vestlig Retning. Jo større l er, desto mere afviger Geoide-snittet fra Cirkelbuen; men ved forholdsvis saa smaa Afstande som en halv Snes Kilometer vil denne Afvigelse under vore Forhold ikke være stor og l neppe overskride en Brøkdel af et Buesekund. Forskellen imellem de to Værdier, der opføres i Art. IV og VII som Resultat af de to Metoder er 9.8 Millimeter, og antager man, at hele denne Forskel skyldes Lodafvigelsen, har man til Bestemmelsen af l

$$0 = -9^{\text{mm}}.8 + lD$$

eller idet $D = 8500000^{\text{mm}}$,

$$l = 0''.23,$$

og selv om denne Værdi aldeles ikke kan betragtes som den i det foreliggende Tilfælde gældende Værdi, turde den dog give et Begreb om dens Størrelse. Med Hensyn til Lodafvigelsens Indflydelse paa det endelige Resultat henvises til næste Artikel.

IX.

Det endelige Resultat.

Sammenfattes de i Art. IV og VII fremstillede Værdier for Højdeforskellen KH

$$\begin{aligned} & - 775^{\text{mm}}.2 \pm 5^{\text{mm}}.5 \quad (\text{reciprok Methode}) \\ \text{og} & - 765^{\text{mm}}.4 \pm 7^{\text{mm}}.3 \quad (\text{Midtemetoden}) \end{aligned}$$

efter deres Vægte 1.8 og 1, saa erholdes som **endeligt Resultat**

$$KH = -771.7 \pm 4.4 \text{ Millimeter.}$$

Forskellen mellem de to Methodeværdier

$$9^{\text{mm}}.8 \pm 9^{\text{mm}}.1,$$

tyder ikke paa særegne systematiske Fejl ved de to Metoder, idet denne Forskel ikke væsentlig overskrider paagældende Middelfejl, og det er derfor ikke nødvendigt at ty til Lodafvigelsen for at forklare den. Imidlertid er det dog værd at lægge Mærke til, at ifølge forrige Artikel skulde Afvigelsen $9^{\text{mm}}.8$, for saa vidt den skyldes Lodafvigelsen, fordeles med 1 og -2 Trediedele, altsaa med $+3.3$ og -6.5 paa Resultaterne af de to Metoder, der, naar denne Fremgangsmaade vælges, begge give

$$KH = -771.9 \text{ Millimeter,}$$

som kun er $0^{\text{mm}}.2$ forskellig fra det ovenfor erholdte endelige Resultat. Dette stemmer godt med, at Lodafvigelserne i nærværende Tilfælde nødvendig maa faa en betydningsløs Indflydelse, idet Reduktionerne skulle sammendrages efter Vægtene 1.8 og 1, saaledes at de henset til Værdierne i forrige Artikel tilsammen andrage

$$\frac{1.8-2.0}{3 \times 2.8} lD = -\frac{1}{42} lD,$$

eller, for $D = 85.10^5$ Millimeter og l i Buesekunder,

$$\text{Reduktionen} = -1^{\text{mm}}.l,$$

der for rimelige Værdier af l er uden kendelig Betydning.

Da Afstanden mellem Knudshoved og Højklint er 17 Kilometer, svarer Middelfejlen $4^{\text{mm}}.4$ eller den sandsynlige Fejl 3^{mm} til en sandsynlig Kilometerfejl ved geometrisk Nivellement af højst $0^{\text{mm}}.8$, og det vil deraf sees, at det er lykkedes at føre Præcisionsnivellementet over Store Belt med en Nøjagtighed, der ikke staar tilbage for de Resultater som — forudsat at Fyn

havde været landfast med Sjælland — kunde opnaas ved et særlig omhyggeligt geometrisk Nivellement.

For Fuldstændigheds Skyld skal endnu tilføjes, at Vandstandsmaalerne i Slipshavn og Korsør ved Dobbeltnivellement ere satte i Forbindelse med Endepunkterne *K* og *H* af Beltovergangen, hvorved en Sammenligning af deres Resultater nu er bleven mulig. Det viser sig da, at Middelvandstanden i Korsør Havn er lidt over 2 Centimeter højere end i Slipshavn, og dette er i god Overensstemmelse med de lokale Forhold, som i Forbindelse med de overvejende vestlige Vinde maa medføre en Tendens til højere Middelvandstand i Korsør Havn end i Nyborgfjord.

Nivellement de précision. Passage du Grand Belt.

Par

le général **G. Zachariae.**

(Présenté à la séance du 11 mars 1898.)

Résumé.

L'article I donne quelques remarques préliminaires sur le problème à résoudre et montre que, pour neutraliser l'effet perturbateur de la réfraction, il faut des milliers d'observations disposées par groupes et portant systématiquement sur telles et telles heures tant du matin que du soir. La petite île de Sprogö, situé au milieu même du Belt, permet de restreindre la distance à 8 kilomètres environ et d'employer deux méthodes différentes, celle des observations réciproques et celle des observations d'une seule station qui tient le milieu exact entre les deux repères. Dans l'article II, on explique le procédé de M. le lieutenant-colonel Rasmussen pour la méthode réciproque. Ce procédé a cela de particulier que, pour obtenir un nivellement trigonométrique, on peut se contenter d'instruments ordinaires de nivellement géométrique, pourvu qu'ils aient des niveaux sensibles et des micromètres oculaires.

L'article III contient les tableaux des groupes d'observations de la méthode réciproque dont on s'est servi pour réunir la Fionie à l'île de Sprogö et cette île à la Seeland, ainsi que les tableaux du nivellement géométrique entre les stations intermédiaires de Sprogö.

Les articles IV et V sont consacrés aux erreurs constantes des deux instruments et à l'influence de la courbure de la terre et de la réfraction moyenne. La méthode réciproque ayant été employée sur trois lignes, l'une à l'ouest, entre la

Fionie et Sprogö, les deux autres à l'est, entre Sprogö et la Seeland, les résultats obtenus présentent un moyen assez sûr de constater l'invariabilité des instruments et en même temps l'admissibilité des hypothèses qui servent de base à cette méthode. En désignant par (1) et (2) les valeurs kilométriques des erreurs constantes des deux instruments, on déduit, des observations faites sur les trois lignes, les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{r} (1)-(2) = 67.2 \pm 0.9 \text{ millimètres} \\ (1)-(2) = 67.9 \pm 1.5 \quad - \\ (1)-(2) = 67.4 \pm 1.4 \quad - \\ \hline \text{Moyenne} = 67.5 \pm 0.7 \text{ millimètres.} \end{array}$$

L'accord parfait des trois résultats présente, ce me semble, un contrôle de quelque valeur.

Dans l'article VI, on résout l'erreur de la réfraction en deux composantes dont l'une, f , est commune aux deux observations réciproques, tandis que l'autre, s , est particulière à chacune de ces observations. Les colonnes $f:D^2$ et $s:D^2$ du tableau présentent les valeurs kilométriques déduites des groupes d'observations des trois lignes, et montrent une variabilité marquée de la composante $f:D^2$ et une constance prononcée de $s:D^2$. D'après cela, l'observation simultanée l'emporte tellement sur les autres qu'en moyenne une seule paire simultanée vaut autant que vingt paires dont les deux composantes ne se correspondent pas mutuellement pour le temps.

La méthode dite *par le milieu exact* est traitée dans l'article VII. Avec cette méthode, l'observation est relativement facile, mais le choix de la station présente de grandes difficultés, non seulement pour la détermination exacte de la distance, mais surtout pour se ménager des conditions égales de réfraction moyenne dans les deux directions des visées. Pour cela il a fallu faire une petite triangulation trigonométrique et établir à Sprogö un pilier d'observation de 9 mètres de hauteur.

L'article VIII s'occupe de l'influence qu'exerce la déviation de la verticale. Si l'on suppose que cette déviation puisse être exprimée par une fonction algébrique du 2^e degré, on trouve que la correction probable due à la dite cause est insensible, comparée à l'erreur moyenne due surtout à la réfraction.

Enfin, dans l'article IX, on trouve les résultats définitifs, savoir :

$$\begin{aligned} & -775^{\text{mm}}.2 \pm 5^{\text{mm}}.5 \text{ (méthode réciproque)} \\ & -765^{\text{mm}}.4 \pm 7^{\text{mm}}.3 \text{ (— par le milieu),} \end{aligned}$$

qui, combinés d'après leurs poids, donnent pour la hauteur du repère du Højklint (Seeland) sur celui du Knudshoved (Fionie) :

$$KH = -771.7 \pm 4.4 \text{ millimètres.}$$

La différence des résultats des deux méthodes, savoir

$$9.8 \pm 9.1 \text{ millimètres,}$$

ne porte pas à croire qu'il y ait, dans les deux méthodes, des erreurs systématiques d'une influence différente. Cependant, si l'on suppose que la différence $9^{\text{mm}}.8$ soit due à la déviation de la verticale, il faut, d'après la théorie exposée dans l'article VIII, la répartir avec $+3.3$ et -6.5 sur les résultats des deux méthodes, d'où il suit :

$$KH = -771.9 \text{ millimètres,}$$

valeur qui ne diffère que de $0^{\text{mm}}.2$ du résultat définitif.

Il faut encore remarquer que les maréographes de Slipshavn en Fionie et du port de Korsør en Seeland ont été rattachés à la ligne du Grand Belt et que, par conséquent, on peut comparer les niveaux moyens de la mer indiqués par ces deux maréographes. De cette manière on trouve qu'à Korsør le niveau moyen surpasse d'environ deux centimètres celui de Slipshavn. Cette différence concorde bien avec les conditions locales qui, jointes au fait que les vents d'ouest prédominent dans ces parages, doivent faire qu'au port de Korsør le niveau moyen doit être un peu plus fort que dans le port de Slipshavn (baie de Nyborg).